

第2章 | 統計的な推測



2章

統計的な推測

第1節 確率分布

1 確率変数と確率分布

まとめ

1 確率変数

試行の結果によってその値が定まり、各値に対応して確率が定まるような変数を **確率変数** という。

2 確率分布

確率変数 X のとりうる値が $x_1, x_2, \dots, x_n$ であり、それぞれの値をとる確率が $p_1, p_2, \dots, p_n$ であるとき、次のことが成り立つ。

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

確率変数 X のとりうる値とその値をとる確率との対応関係は、下の表のように書き表される。この対応関係を、 X の **確率分布** または **分布** といい、確率変数 X はこの分布に **従う** という。

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

3 確率の表し方

確率変数 X が値 a をとる確率を $P(X=a)$ で表す。

また、 X が a 以上 b 以下の値をとる確率を $P(a \leq X \leq b)$ で表す。

A 確率変数 B 確率分布の求め方

教 p.53

練習
1

白玉2個と黒玉3個の入った袋から、4個の玉を同時に取り出すとき、出る黒玉の個数を X とする。 X の確率分布を求めよ。

指針 確率分布の求め方 確率変数 X (出る黒玉の個数) は2か3である。4個の玉を同時に取り出すときに黒玉が2個、3個になる確率を求め、対応関係を表にする。求めた確率の和は1になる。

解答 X のとりうる値は、2, 3である。

各値について、 X がその値をとる確率を求めると

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_2}{{}_5C_4} = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_1} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_3}{{}_5C_4} = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_3}{{}_5C_1} = \frac{2}{5}$$

よって、 X の確率分布は右の表のようになる。

X	2	3	計
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

答

練習 2

2 個のさいころを同時に投げて、出る目の和を X とする。 X の確率分布を求めよ。

教 p.53

指針 確率分布の求め方 確率変数 X (出る目の和) は多くの値をとりうる。このような場合は、**解答**のように、2 個のさいころの目とその和を対応させた表を作ると、すべての場合をもれなく把握できる。

解答 2 個のさいころの出る目とその和の対応は右の表のようになる。この表から、 X のとりうる値は、2, 3, 4, …, 11, 12 である。

起こりうるすべての場合の数は

$6 \times 6 = 36$ (通り) であるから、 X が各値をとる確率を求めると、 X の確率分布は次の表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

答

注意 本問のように、確率変数のとりうる値が多い場合には、求めた確率の和を計算してそれが 1 になるかどうかを確認し、計算ミスがないかをチェックするとよい。

2 確率変数の期待値と分散

まとめ

2章

統計的な推測

1 期待値(平均)

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき

表

X	x_1	x_2	……	x_n	計
P	p_1	p_2	……	p_n	1

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

を、 X の 期待値 または 平均 といい、 $E(X)$ または m で表す。

2 $aX+b$ の期待値

X を確率変数、 a 、 b を定数とすると、 $aX+b$ も確率変数であり

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

3 X^2 の期待値

確率変数 X に対して、 X^2 もまた確率変数である。 X の確率分布が右上の表

で与えられるとき、 X^2 の期待値は $E(X^2) = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$

4 確率変数の分散

確率変数 X の確率分布が右上の表で与えられ、その期待値が m であるとするとき、確率変数 $(X-m)^2$ の期待値 $E((X-m)^2)$ を、確率変数 X の 分散 といい、 $V(X)$ で表す。

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-m)^2) \\ &= (x_1-m)^2 p_1 + (x_2-m)^2 p_2 + \cdots + (x_n-m)^2 p_n \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k-m)^2 p_k \end{aligned}$$

5 分散と期待値

確率変数 X の分散について、次の関係が成り立つ。

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \quad \leftarrow (X \text{ の分散}) = (X^2 \text{ の期待値}) - (X \text{ の期待値})^2$$

6 確率変数の標準偏差

確率変数 X について、 X の分散 $V(X)$ の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を X の 標準偏差 といい、 $\sigma(X)$ で表す。

注意 $\sigma(X)$ の σ はギリシャ文字の小文字で「シグマ」と読む。

参考 標準偏差 $\sigma(X)$ は、 X の分布の平均 m を中心として、 X のとる値の散らばる傾向の程度を表している。標準偏差 $\sigma(X)$ の値が小さいほど、 X のとる値は、平均 m の近くに集中する傾向にある。

7 $aX+b$ の分散と標準偏差

X を確率変数、 a 、 b を定数とすると

$$V(aX+b) = a^2 V(X), \quad \sigma(aX+b) = |a| \sigma(X)$$

A 確率変数の期待値

教 p.56

練習
3

白玉 4 個と黒玉 2 個の入った袋から、2 個の玉を同時に取り出すとき、出る白玉の個数を X とする。 X の期待値を求めよ。

指針 確率変数の期待値 まず、 X の各値に対応する確率を求め、確率分布の表を作る。次に、その表をもとに、 $(X \text{ の値}) \times (\text{確率})$ の和を計算すればよい。

解答 X のとりうる値は、0, 1, 2 であり、 X が各値をとる確率は

$$P(X=0) = \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}, \quad P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{8}{15},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{6}{15}$$

よって、 X の確率分布は右の表のようになる。

したがって、 X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{6}{15} = \frac{4}{3} \quad \text{答}$$

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

期待値は数学 A
でも学習したね。

B $aX+b$ の期待値

教 p.57

練習
4

教科書の例 3 の確率変数 X に対して、次の確率変数の期待値を求めよ。

(1) $X+2$

(2) $4X-1$

(3) $-3X$

指針 $aX+b$ の期待値 $E(aX+b) = aE(X) + b$ を利用して、教科書 p.57 例 3 で求めた $E(X) = \frac{7}{2}$ をもとにして計算する。

解答 $E(X) = \frac{7}{2}$ より

(1) $E(X+2) = E(X) + 2 = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2} \quad \text{答}$

(2) $E(4X-1) = 4E(X) - 1 = 4 \cdot \frac{7}{2} - 1 = 13 \quad \text{答}$

(3) $E(-3X) = -3E(X) = -3 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{21}{2} \quad \text{答}$

C X^2 の期待値

教 p.57

練習
5

2枚の硬貨を同時に投げて表が出る硬貨の枚数を X とするとき、 X^2 の期待値を求めよ。

指針 X^2 の期待値 確率変数 X のとりうる値は 0, 1, 2 である。まず, X の確率分布を求める。

解答 表裏の出方は全部で $2^2=4$ (通り)

$X=0$ となるのは (裏, 裏)

$X=1$ となるのは (表, 裏), (裏, 表)

$X=2$ となるのは (表, 表)

よって, X の確率分布は右の表のようになるから, X^2 の期待値は

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{2}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{答}$$

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

D 確率変数の分散と標準偏差

教 p.59

練習
6

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられるとき, X の分散を求めよ。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

指針 分散の定義による計算 まず, 期待値 $m=E(X)$ を求め, 次に,

$V(X) = \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 p_k$ の定義式をもとにして, 分散 $V(X)$ を計算する。

解答 X の期待値は

$$m = E(X) = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

よって, X の分散は

$$V(X) = \left(0 - \frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + \left(1 - \frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{6}{10} + \left(2 - \frac{6}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{90}{250} = \frac{9}{25} \quad \text{答}$$

練習
7

白玉 2 個と黒玉 3 個の入った袋から、2 個の玉を同時に取り出すとき、出る白玉の個数を X とする。 X の分散を求めよ。

指針 分散と期待値 まず、 X の確率分布を求めて $E(X)$ 、 $E(X^2)$ を計算する。次に、 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を利用して、分散を計算する。

解答 X のとりうる値は、0, 1, 2 であり、 X が各値をとる確率は

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}, \quad P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

よって、 X の確率分布は右の表ようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\leftarrow \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\leftarrow \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$$

したがって、 X の分散は

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \quad \text{答}$$

練習
8

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられるとき、次の値を求めよ。

(1) X の分散 (2) X の標準偏差

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

指針 分散と標準偏差 まず、 $E(X)$ 、 $E(X^2)$ を計算し、 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 、 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ より、分散、標準偏差を求める。

解答 (1) $E(X) = 0 \cdot \frac{3}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$$\leftarrow \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{6} + 1^2 \cdot \frac{2}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$\leftarrow \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$$

よって、 X の分散は

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \quad \text{答}$$

(2) X の標準偏差は $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{答}$

E $aX+b$ の分散と標準偏差

教 p.61

練習
9

教科書の例 8 において, 次の確率変数の期待値, 分散, 標準偏差を求めよ。

(1) $X+4$

(2) $-2X$

(3) $3X-2$

指針 $aX+b$ の期待値, 分散, 標準偏差 X を確率変数, a, b を定数とするとき

$$E(aX+b)=aE(X)+b, \quad V(aX+b)=a^2V(X), \quad \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

解答 教科書 p.61 の例 8 より, 1 個のさいころを投げて出る目を X とすると

$$E(X)=\frac{7}{2}, \quad V(X)=\frac{35}{12}, \quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

$$(1) \quad E(X+4)=E(X)+4=\frac{7}{2}+4=\frac{15}{2}$$

$$V(X+4)=1^2 \cdot V(X)=\frac{35}{12}$$

$$\sigma(X+4)=|1|\sigma(X)=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

□ 期待値 $\frac{15}{2}$, 分散 $\frac{35}{12}$, 標準偏差 $\frac{\sqrt{105}}{6}$

$$(2) \quad E(-2X)=-2E(X)=-2 \cdot \frac{7}{2}=-7$$

$$V(-2X)=(-2)^2 V(X)=(-2)^2 \cdot \frac{35}{12}=\frac{35}{3}$$

$$\sigma(-2X)=|-2|\sigma(X)=2 \cdot \frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{\sqrt{105}}{3}$$

□ 期待値 -7 , 分散 $\frac{35}{3}$, 標準偏差 $\frac{\sqrt{105}}{3}$

$$(3) \quad E(3X-2)=3E(X)-2=3 \cdot \frac{7}{2}-2=\frac{17}{2}$$

$$V(3X-2)=3^2 V(X)=3^2 \cdot \frac{35}{12}=\frac{105}{4}$$

$$\sigma(3X-2)=|3|\sigma(X)=3 \cdot \frac{\sqrt{105}}{6}=\frac{\sqrt{105}}{2}$$

□ 期待値 $\frac{17}{2}$, 分散 $\frac{105}{4}$, 標準偏差 $\frac{\sqrt{105}}{2}$

3 確率変数の和と積

まとめ

1 同時分布

ある試行によって X , Y の値が定まるとき, $X=a$ かつ $Y=b$ である確率を $P(X=a, Y=b)$ と表す。たとえば

$$P(X=1, Y=1)=\frac{2}{15}, \quad P(X=1, Y=2)=\frac{4}{15}$$

$$P(X=2, Y=1)=\frac{4}{15}, \quad P(X=2, Y=2)=\frac{5}{15}$$

のとき, X のみ, Y のみに着目すると

$$P(X=1)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}, \quad P(X=2)=\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{9}{15}$$

$$P(Y=1)=\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{6}{15}, \quad P(Y=2)=\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{9}{15}$$

であり, X , Y は確率変数である。

この確率変数 X , Y の確率分布は, 右のように表される。この対応を X , Y の 同時分布 という。

この表から, X と Y のそれぞれの確率分布は, 次の表で与えられる。

X	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

Y	1	2	計
P	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

$X \backslash Y$	1	2	計
1	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$
2	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{9}{15}$
計	$\frac{6}{15}$	$\frac{9}{15}$	1

2 確率変数の和の期待値

- ① 2つの確率変数 X , Y について $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- ② 3つ以上の確率変数の和の期待値についても, 2つの場合と同様なことが成り立つ。たとえば, 3つの確率変数 X , Y , Z について, 次のことが成り立つ。

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

3 $aX+bY$ の期待値

X , Y を確率変数, a , b を定数とすると

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$$

4 確率変数の積の期待値・和の分散

2つの確率変数 X , Y について

$P(X=a, Y=b)=P(X=a) \cdot P(Y=b)$ が a , b のとり方に関係なく常に成り立つとき, 確率変数 X , Y は互いに 独立 であるという。

2つの確率変数 X, Y が互いに独立であるとき、次のことが成り立つ。

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

5 3つ以上の確率変数の独立

3つ以上の確率変数の独立についても、2つの場合と同様に定義する。

たとえば、3つの確率変数 X, Y, Z について

$P(X=a, Y=b, Z=c) = P(X=a) \cdot P(Y=b) \cdot P(Z=c)$ が a, b, c のとり方に
関係なく常に成り立つとき、確率変数 X, Y, Z は互いに独立であるといい、
2つの確率変数の場合と同様に次のことが成り立つ。

$$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z)$$

$$V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z)$$

A 同時分布

教 p.63

練習 10

箱の中に10枚のカードが入っていて、そのうち2枚には数字3、8枚には数字4が書いてある。これらのカードをもとにもどさないで1枚ずつ2回取り出すとき、1回目のカードの数字を X 、2回目のカードの数字を Y とする。このとき、 X と Y の同時分布を求めよ。

指針 同時分布 1回目に取り出したカードはもとにもどさないから、1回目に取り出すカードによって、2回目にそれぞれのカードを取り出す確率は変わる。このことに注意して $P(X=3, Y=3)$ 、 $P(X=3, Y=4)$ 、 $P(X=4, Y=3)$ 、 $P(X=4, Y=4)$ を計算する。

解答 $P(X=3, Y=3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$, $P(X=3, Y=4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{45}$

$$P(X=4, Y=3) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{45}, \quad P(X=4, Y=4) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{45}$$

確率変数 X のみに着目すると

$$P(X=3) = \frac{1}{45} + \frac{8}{45} = \frac{9}{45}, \quad P(X=4) = \frac{8}{45} + \frac{28}{45} = \frac{36}{45}$$

確率変数 Y のみに着目すると

$$P(Y=3) = \frac{1}{45} + \frac{8}{45} = \frac{9}{45},$$

$$P(Y=4) = \frac{8}{45} + \frac{28}{45} = \frac{36}{45}$$

よって、 X と Y の同時分布は右の表ようになる。

$X \backslash Y$	3	4	計
3	$\frac{1}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{9}{45}$
4	$\frac{8}{45}$	$\frac{28}{45}$	$\frac{36}{45}$
計	$\frac{9}{45}$	$\frac{36}{45}$	1

答

B 確率変数の和の期待値

教 p.64

練習
11

確率変数 X, Y の確率分布が次の表で与えられているとき、 $X+Y$ の期待値を求めよ。

X	1	3	5	計	Y	2	4	6	計
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

指針 確率変数の和の期待値 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ求めることにより、和 $X+Y$ の期待値 $E(X+Y)$ は、 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ で求められる。

解答 X の期待値は $E(X)=1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$

Y の期待値は $E(Y)=2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$

よって、 $X+Y$ の期待値は $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3+4=7$ 答

教 p.65

練習
12

3つの確率変数 X, Y, Z の確率分布が、
いずれも右の表で与えられるとき、
 $X+Y+Z$ の期待値を求めよ。

変数	0	1	計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

指針 3つの確率変数の和の期待値 X, Y, Z の確率分布は同じであるから、その期待値 $E(X), E(Y), E(Z)$ も同じである。まず、その期待値を求め、 $E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$ を用いる。

解答 X, Y, Z の確率分布が同じであるから

$$E(X)=E(Y)=E(Z)=0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

よって、 $X+Y+Z$ の期待値は

$$E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \quad \text{答}$$

C $aX+bY$ の期待値

教 p.65

練習
13

1個のさいころを2回投げて、1回目は出た目の10倍の点、2回目は出た目の5倍の点が得られるとき、得点の期待値を求めよ。

指針 $aX+bY$ の期待値 さいころを2回投げたとき、1回目に出る目を X 、2回目に出る目を Y とすると、得点は $10X+5Y$ で表される。その期待値を、 $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ を用いて計算する。

解答 1個のさいころを2回投げたとき、1回目に出た目を X 、2回目に出た目を Y とすると、得点は $10X+5Y$ で表される。

X, Y の確率分布は、いずれも次の表ようになる。

変数	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって、 X, Y の期待値は

$$E(X)=E(Y) \\ =1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

したがって、得点 $10X+5Y$ の期待値は

$$E(10X+5Y)=10E(X)+5E(Y)=10 \cdot \frac{7}{2} + 5 \cdot \frac{7}{2} = \frac{105}{2} \quad \text{答}$$

D 独立な2つの確率変数の積の期待値

教 p.66

深める

100円硬貨2枚、10円硬貨2枚を同時に投げ、100円硬貨の表の出る枚数を X 、10円硬貨の表の出る枚数を Y とする。このとき、2つの確率変数 X, Y は互いに独立であることを確かめてみよう。

指針 2つの確率変数の独立 X と Y の同時分布を求め、

$P(X=a, Y=b)=P(X=a) \cdot P(Y=b)$ が成り立っていることを確認する。

解答 4枚の硬貨の表裏の出方は 2^4 通りある。また、100円硬貨のうちで表が出る硬貨の枚数が $a(a=0, 1, 2)$ となる出方は ${}_2C_a$ 通り、10円硬貨のうちで表が出る硬貨の枚数が $b(b=0, 1, 2)$ となる出方は ${}_2C_b$ 通りであるから

$$P(X=a, Y=b) = \frac{{}_2C_a \times {}_2C_b}{2^4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となる。①をもとにして同時分布の表を作ると、右のようになる。

この表から、すべての a, b に対して

$$P(X=a, Y=b)=P(X=a) \cdot P(Y=b)$$

が成り立っていることがわかる。

したがって、 X, Y は互いに独立である。 終

参考 同時分布の表を作らずに、次のように説明することもできる。

$$\textcircled{1}より \quad P(X=a, Y=b) = \frac{{}_2C_a}{2^2} \times \frac{{}_2C_b}{2^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ここで、 $\frac{{}_2C_a}{2^2}$ は2枚の100円硬貨のうち表が a 枚出る確率、 $\frac{{}_2C_b}{2^2}$ は2枚の10

$X \backslash Y$	0	1	2	計
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
計	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

円硬貨のうち表が b 枚出る確率を表すから

$$\frac{{}_2C_a}{2^2} \times \frac{{}_2C_b}{2^2} = P(X=a) \cdot P(Y=b) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③より $P(X=a, Y=b) = P(X=a) \cdot P(Y=b)$

したがって, X, Y は互いに独立である。

練習
14

2つの確率変数 X, Y が互いに独立で, それぞれの確率分布が右の表で与えられるとき, XY の期待値を求めよ。

X	1	3	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Y	2	4	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

教 p.67

指針 独立な確率変数の積の期待値 X, Y は互いに独立であるから, まず, $E(X), E(Y)$ を求め, $E(XY) = E(X)E(Y)$ を用いればよい。

解答 $E(X), E(Y)$ をそれぞれ計算すると

$$E(X) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$E(Y) = 2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{5}$$

X, Y は互いに独立であるから, XY の期待値は

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{5}{3} \cdot \frac{12}{5} = 4 \quad \text{答}$$

X, Y が互いに独立であることは必ず述べておくこと。



E 独立な2つの確率変数の和の分散

練習
15

教科書の練習14の確率変数 X, Y について, 次の値を求めよ。

(1) $X+Y$ の分散

(2) $X+Y$ の標準偏差

教 p.68

指針 独立な確率変数の和の分散と標準偏差

(1) X, Y は互いに独立であるから, まず, $V(X), V(Y)$ を求め,

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ を用いればよい。 $V(X)$ は, $E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を利用して求めるとよい。

(2) $\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)}$ である。

解答 (1) $E(X) = \frac{5}{3}, E(Y) = \frac{12}{5}$

また $E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}, E(Y^2) = 2^2 \cdot \frac{4}{5} + 4^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{32}{5}$

よって $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{11}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{32}{5} - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

X, Y は互いに独立であるから, $X+Y$ の分散は

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{8}{9} + \frac{16}{25} = \frac{344}{225} \quad \text{答}$$

(2) $X+Y$ の標準偏差は

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)} = \sqrt{\frac{344}{225}} = \frac{2\sqrt{86}}{15} \quad \text{答}$$

F 3つ以上の確率変数の独立

教 p.68

練習
16

大中小3個のさいころを投げるとき, 次の値を求めよ。

(1) 出る目の積の期待値 (2) 出る目の和の分散

指針 3つの確率変数の積の期待値・和の分散 3個のさいころの出る目の数をそれぞれ X, Y, Z とすると, X, Y, Z は互いに独立であるから

$$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z), \quad V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z)$$

解答 大中小3個のさいころの出る目の数をそれぞれ X, Y, Z とする。

それぞれのさいころを投げるという試行は独立であるから, その結果によって定まる確率変数 X, Y, Z は互いに独立である。

X, Y, Z の確率分布はいずれも表のようになる。

目の数	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = E(Y) = E(Z) = \sum_{k=1}^6 \left(k \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = \frac{7}{2}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = E(Z^2) = \sum_{k=1}^6 \left(k^2 \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 = \frac{91}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\text{よって, } V(Y) = V(Z) = \frac{35}{12}$$

(1) X, Y, Z は互いに独立であるから, 積 XYZ の期待値は

$$E(XYZ) = E(X)E(Y)E(Z) = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8} \quad \text{答}$$

(2) X, Y, Z は互いに独立であるから, 和 $X+Y+Z$ の分散は

$$V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) = \frac{35}{12} \cdot 3 = \frac{35}{4} \quad \text{答}$$

コラム 確率変数の積の分散

教 p.69

確認

2つの確率変数 X, Y が互いに独立で、それぞれの確率分布が次の表で与えられているとき、 $V(XY)$ と $V(X)V(Y)$ をそれぞれ求めてみよう。

X	1	3	計
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Y	2	4	計
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

指針 確率変数の積の分散と分散の積

前半の XY の分散 $V(XY)$ を求めることがポイントとなる。そのために、まず、 X, Y の同時分布を求め、それをもとにして XY の確率分布を求める。

解答 X, Y は互いに独立であるから

$$P(X=1, Y=2) = P(X=1) \cdot P(Y=2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=1, Y=4) = P(X=1) \cdot P(Y=4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

$$P(X=3, Y=2) = P(X=3) \cdot P(Y=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

$$P(X=3, Y=4) = P(X=3) \cdot P(Y=4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

よって、 X, Y の同時分布は下の表ようになる。

$X \backslash Y$	2	4	計
1	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
計	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

したがって、確率変数 XY の確率分布は下の表ようになる。

XY	2	4	6	12	計
P	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

よって

$$E(XY) = 2 \cdot \frac{8}{15} + 4 \cdot \frac{2}{15} + 6 \cdot \frac{4}{15} + 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{60}{15} = 4$$

したがって

$$V(XY) = (2-4)^2 \cdot \frac{8}{15} + (4-4)^2 \cdot \frac{2}{15} + (6-4)^2 \cdot \frac{4}{15} + (12-4)^2 \cdot \frac{1}{15} \\ = \frac{32}{15} + 0 + \frac{16}{15} + \frac{64}{15} = \frac{112}{15} \quad \text{答}$$

$$\text{また} \quad E(X) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{よって} \quad V(X) = \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{27} + \frac{16}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}$$

$$\text{さらに} \quad E(Y) = 2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\text{よって} \quad V(Y) = \left(2 - \frac{12}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} + \left(4 - \frac{12}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125} + \frac{64}{125} = \frac{80}{125} = \frac{16}{25}$$

$$\text{したがって} \quad V(X)V(Y) = \frac{8}{9} \cdot \frac{16}{25} = \frac{128}{225} \quad \text{答}$$

注意 本問の結果からわかるように、一般には、 $V(XY) = V(X)V(Y)$ は成り立たない。

補足 $V(X)$, $V(Y)$ は、 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$, $V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2$ で求めてもよい。

発見

教 p.69

2つの確率変数 X , Y が互いに独立であるとき、

$$V(XY) = E(X^2)E(Y^2) - \{E(X)\}^2\{E(Y)\}^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

をさらに変形して、 $V(XY)$ を $V(X)$, $V(Y)$, $E(X)$, $E(Y)$ を用いて表してみよう。

指針 確率変数の積の分散の関係式 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ より、 $E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$ が成り立つ。同様に、 $E(Y^2) = V(Y) + \{E(Y)\}^2$ が成り立つ。これらを②に代入する。

解答 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$, $V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2$ であるから
 $E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$, $E(Y^2) = V(Y) + \{E(Y)\}^2$

この2つの式を②に代入すると

$$\begin{aligned} V(XY) &= E(X^2)E(Y^2) - \{E(X)\}^2\{E(Y)\}^2 \\ &= [V(X) + \{E(X)\}^2][V(Y) + \{E(Y)\}^2] - \{E(X)\}^2\{E(Y)\}^2 \\ &= V(X)V(Y) + V(X)\{E(Y)\}^2 + V(Y)\{E(X)\}^2 \\ &\quad + \{E(X)\}^2\{E(Y)\}^2 - \{E(X)\}^2\{E(Y)\}^2 \\ &= V(X)V(Y) + V(X)\{E(Y)\}^2 + V(Y)\{E(X)\}^2 \end{aligned}$$

したがって

$$V(XY) = V(X)V(Y) + V(X)\{E(Y)\}^2 + V(Y)\{E(X)\}^2 \quad \text{答}$$

まとめ

互いに独立な2つの確率変数 X, Y について、
 $V(XY) = V(X)V(Y)$ が成り立つのはどのようなときだろうか。
 上の発見の結果を利用して、 X, Y が満たす条件をまとめてみよう。

指針 $V(XY) = V(X)V(Y)$ が成り立つ条件

「発見」で導いた等式において、 $V(XY) = V(X)V(Y)$ が成立する条件を考える。

解答 「発見」の結果より、 X, Y が互いに独立のとき

$$V(XY) = V(X)V(Y) + V(X)\{E(Y)\}^2 + V(Y)\{E(X)\}^2$$

したがって、 $V(XY) = V(X)V(Y)$ が成り立つのは

$$V(X)\{E(Y)\}^2 + V(Y)\{E(X)\}^2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

のときである。 $V(X)\{E(Y)\}^2 \geq 0$, $V(Y)\{E(X)\}^2 \geq 0$ であるから、

③が成り立つための条件は

$$V(X)\{E(Y)\}^2 = 0 \text{ かつ } V(Y)\{E(X)\}^2 = 0$$

すなわち、 $V(XY) = V(X)V(Y)$ が成り立つための条件は

$$V(X)E(Y) = 0 \text{ かつ } V(Y)E(X) = 0 \quad \text{答}$$

4 二項分布

まとめ

2 章

統計的な推測

1 反復試行の確率

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回行う反復試行において、 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_nC_r p^r q^{n-r} \quad \text{ただし, } q=1-p$$

2 二項分布

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回行う反復試行において、事象 A の起こる回数を X とすると、 X は確率変数で、その確率分布は次の表ようになる。(ただし, $q=1-p$)

X	0	1		r		n	計
P	${}_nC_0 q^n$	${}_nC_1 p q^{n-1}$		${}_nC_r p^r q^{n-r}$		${}_nC_n p^n$	1

この表で与えられる確率分布を 二項分布 といい、 $B(n, p)$ で表す。また、確率変数 X は二項分布 $B(n, p)$ に従うという。

3 二項分布に従う確率変数の期待値、分散、標準偏差

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき

期待値は $E(X) = np$

分散は $V(X) = npq$ ただし, $q=1-p$

標準偏差は $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

A 二項分布

教 p.71

練習
17

1 個のさいころを 5 回投げて、2 以下の目が出る回数を X とする。
 X はどのような二項分布に従うか。また、次の確率を求めよ。

(1) $P(X=2)$ (2) $P(X=5)$ (3) $P(2 \leq X \leq 4)$

指針 二項分布と反復試行の確率 反復試行を 5 回行うので、 X は二項分布 $B(5, p)$ に従い、 p はさいころを 1 回投げたときに 2 以下の目が出る確率である。また、(1)~(3)は、 $P(X=r) = {}_5C_r p^r q^{5-r}$ (ただし, $q=1-p$) を用いて求める。

解答 さいころを投げる試行を 5 回行い、

1 回の試行で 2 以下の目が出る確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

したがって、 X は 二項分布 $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$ に従う。 図

また、2 以下の目がちょうど r 回出る確率は

$$P(X=r) = {}_5C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-r} = {}_5C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{5-r}$$

$$(1) P(X=2) = {}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \frac{8}{243} = \frac{80}{243} \quad \text{答}$$

$$(2) P(X=5) = {}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 1 \cdot \frac{1}{243} = \frac{1}{243} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} (3) P(2 \leq X \leq 4) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\ &= \frac{80}{243} + {}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ &= \frac{80}{243} + \frac{40}{243} + \frac{10}{243} = \frac{130}{243} \quad \text{答} \end{aligned}$$

反復試行の確率は数学 A で学習したね。



B 二項分布に従う確率変数の期待値と分散

教 p.71



確率変数 X が二項分布 $B(3, p)$ に従うとき、 X の期待値と分散を、それぞれ定義にもとづいて計算して求めてみよう。

指針 二項分布に従う確率変数の期待値と分散

確率分布を求め、定義に従って、 $E(X)$ 、 $V(X)$ を計算する。 $V(X)$ の計算では、 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を用いるとよい。

解答 $q = 1 - p$ とすると、

$P(X=k) = {}_3C_k p^k q^{3-k}$ であり、 X の

確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

X の期待値は $E(X) = 0 \cdot q^3 + 1 \cdot 3pq^2 + 2 \cdot 3p^2q + 3p^3$

$$\begin{aligned} &= 3pq^2 + 6p^2q + 3p^3 \\ &= 3p(p^2 + 2pq + q^2) \\ &= 3p(p+q)^2 = 3p \quad \text{答} \end{aligned}$$

また $E(X^2) = 0^2 \cdot q^3 + 1^2 \cdot 3pq^2 + 2^2 \cdot 3p^2q + 3^2 \cdot p^3$

$$\begin{aligned} &= 3pq^2 + 12p^2q + 9p^3 = 3p(q^2 + 4pq + 3p^2) \\ &= 3p(q+p)(q+3p) = 3p(3p+q) \end{aligned}$$

X の分散は $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

$$\begin{aligned} &= 3p(3p+q) - (3p)^2 \\ &= 3p\{(3p+q) - 3p\} = 3pq = 3p(1-p) \quad \text{答} \end{aligned}$$

補足 上の解答では、計算の簡略化と $V(X)$ の計算結果が教科書 p.71 の結果と同じであることを示す目的で、 $q = 1 - p$ として計算を進めているが、おき換えずに、 $1 - p$ のままで計算しても構わない。

練習

18

確率変数 X が二項分布 $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ に従うとき, X の期待値, 分散および標準偏差を求めよ。

指針 二項分布と期待値, 分散, 標準偏差 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき

$$\text{期待値は } E(X) = np$$

$$\text{分散は } V(X) = np(1-p) \quad \text{標準偏差は } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

解答 確率変数 X は二項分布 $B\left(9, \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$X \text{ の期待値は } E(X) = 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$X \text{ の分散は } V(X) = 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$$

$$X \text{ の標準偏差は } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{答 期待値 } \frac{9}{2}, \text{ 分散 } \frac{9}{4}, \text{ 標準偏差 } \frac{3}{2}$$

練習

19

1 枚の硬貨を 100 回投げて, 表の出る回数を X とする。 X の期待値と分散および標準偏差を求めよ。

指針 二項分布と期待値, 分散, 標準偏差 X は二項分布に従う。 $B(n, p)$ の n と p の値を求めて, $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ を計算する。

解答 硬貨を 1 回投げて表の出る確率 p は $p = \frac{1}{2}$

よって, X は二項分布 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ に従うから

$$X \text{ の期待値は } E(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$X \text{ の分散は } V(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 25$$

$$X \text{ の標準偏差は } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{答 期待値 } 50, \text{ 分散 } 25, \text{ 標準偏差 } 5$$

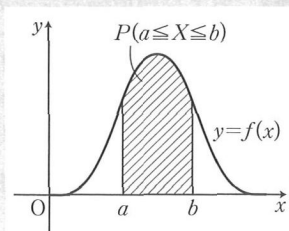
5 正規分布

まとめ

1 確率密度関数と分布曲線

連続した値をとる確率変数 X を **連続型確率変数** という。連続型確率変数 X の確率分布を考える場合は、 X に 1 つの曲線 $y=f(x)$ を対応させ、確率 $P(a \leq X \leq b)$ が図の斜線部分の面積で表されるようにする。

この曲線 $y=f(x)$ を、 X の **分布曲線** といい、関数 $f(x)$ を **確率密度関数** という。



2 確率密度関数の性質

確率密度関数 $f(x)$ は、次のような性質をもつ。

① 常に $f(x) \geq 0$

② 確率 $P(a \leq X \leq b)$ は、曲線 $y=f(x)$ と x 軸、2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積に等しい。

すなわち
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

③ X のとる値の範囲が $\alpha \leq X \leq \beta$ のとき $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$

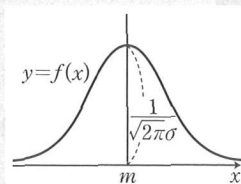
3 正規分布

m を実数、 σ を正の実数とする。このとき、関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

を確率密度関数とするような

連続型確率変数 X は **正規分布 $N(m, \sigma^2)$** に従うという。ここで e は無理数の定数で、 $e=2.71828\cdots$ である。曲線 $y=f(x)$ を **正規分布曲線** という。



4 正規分布に従う確率変数の期待値、標準偏差

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき

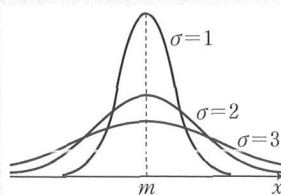
$$\text{期待値は } E(X) = m$$

$$\text{標準偏差は } \sigma(X) = \sigma$$

5 正規分布曲線の性質

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、 X の分布曲線 $y=f(x)$ は、次のような性質をもつ。

① 直線 $x=m$ に関して対称であり、 y は $x=m$ で最大値をとる。



② x 軸を漸近線とし, x 軸と分布曲線の間の面積は 1 である。

③ 標準偏差 σ が大きくなると曲線の山は低くなって横に広がる。

σ が小さくなると曲線の山は高くなって, 直線 $x=m$ の周りに集まる。

6 正規分布と標準正規分布

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ とおくと, 確率変数 Z は, 正規分布 $N(0, 1)$ に従い, Z の期待値は 0, 標準偏差は 1 である。正規分布 $N(0, 1)$ を標準正規分布という。

注意 Z の確率密度関数は, $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ となる。

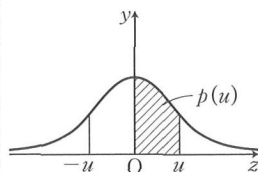
7 標準正規分布と正規分布表

標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に対し, 確率 $P(0 \leq Z \leq u)$ を $p(u)$ で表す。 $p(u)$ は右の図の斜線部分の面積に等しく, 正規分布表には, いろいろな u の値に対する $p(u)$ の値が示されている。

正規分布表を用いて確率を求める際には, とくに次のことが成り立つことに注意する。

$$\begin{aligned} P(-u \leq Z \leq 0) &= P(0 \leq Z \leq u) \\ &= p(u) \quad (u > 0) \end{aligned}$$

$$P(Z \leq 0) = P(Z \geq 0) = 0.5$$



$N(0, 1)$ に従う確率変数
 Z の分布曲線 $\left(y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right)$

8 正規分布の応用

確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うときは, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ とおき, X についての条件を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z の条件に帰着させることにより, 正規分布表を用いて確率を求めることができる。

9 二項分布の正規分布による近似

一般に, 次のことが成り立つ。ただし, いずれの場合も $q=1-p$ とする。

① 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X は, n が大きいとき, 近似的に正規分布 $N(np, npq)$ に従う。

② 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X に対し, $Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ は, n が大きいとき, 近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

A 連続した値をとる確率変数

教 p.76

練習
20

確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられるとき、指定された確率をそれぞれ求めよ。

(1) $f(x)=x$ ($0 \leq x \leq \sqrt{2}$) $0 \leq X \leq 0.5$ である確率

(2) $f(x)=0.5x$ ($0 \leq x \leq 2$) $1 \leq X \leq 2$ である確率

指針 確率密度関数 連続型確率変数 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとき、確率 $P(a \leq X \leq b)$ は、曲線 $y=f(x)$ と x 軸、2 直線 $x=a$, $x=b$ が囲む部分の面積に等しい。

(1) 直線 $y=x$ と x 軸、直線 $x=0.5$ が囲む部分の面積に等しい。

(2) 直線 $y=0.5x$ と x 軸、2 直線 $x=1$, $x=2$ が囲む部分の面積に等しい。

解答 (1) 下の図 1 より $P(0 \leq X \leq 0.5) = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 0.5 = 0.125$ 答

(2) 下の図 2 より $P(1 \leq X \leq 2) = 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 0.5$ ← (全体) - (小さい三角形)
 $= 1 - 0.25 = 0.75$ 答

図 1

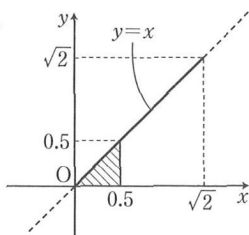
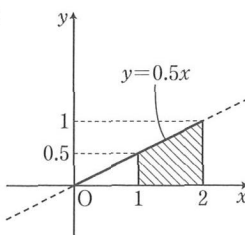


図 2



注意 図 1 の 1 辺が $\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形、図 2 の底辺が 2、高さ 1 の直角三角形について、面積はどちらも 1 になっていることに注意する。

参考 X の確率密度関数が $f(x)$ であるとき、 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ であるから、次のように、定積分の計算によって確率を求めてもよい。

別解 (1) $P(0 \leq X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0.5} = 0.125$ 答

(2) $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 0.5x dx = 0.5 \int_1^2 x dx = 0.5 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2$
 $= 0.5 \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = 0.75$ 答

B 正規分布 C 標準正規分布

教 p.78

練習

21

正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数 X について、 $Z = \frac{X-2}{3}$ が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、 m, σ の値を求めよ。

指針 正規分布と標準正規分布 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。このことから m, σ の値を求める。

解答 $m=2, \sigma=3$ 答

教 p.79

練習

22

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、次の確率を求めよ。

- (1) $P(-2 \leq Z \leq 2)$ (2) $P(1 \leq Z \leq 2)$

指針 標準正規分布と正規分布表

まず、求める確率を $P(0 \leq Z \leq a)$ の形の和や差で表し、次に、正規分布表を用いて必要な値を求める。

解答 (1) $P(-2 \leq Z \leq 2) = P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 2p(2) = 2 \times 0.4772$$

$$= 0.9544 \quad \text{答}$$

(2) $P(1 \leq Z \leq 2) = P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$

$$= p(2) - p(1) = 0.4772 - 0.3413$$

$$= 0.1359 \quad \text{答}$$

教 p.80

練習

23

確率変数 X が正規分布 $N(2, 5^2)$ に従うとき、次の確率を求めよ。

- (1) $P(2 \leq X \leq 12)$ (2) $P(0 \leq X \leq 5)$

指針 一般の正規分布と正規分布表 確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、確率 $P(a \leq X \leq b)$ を求めるには、次のようにする。

[1] $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

ここで、 $X=a, b$ のときの Z の値をそれぞれ α, β とすれば、

$$\alpha = \frac{a-m}{\sigma}, \quad \beta = \frac{b-m}{\sigma} \quad \text{であり、}$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(\alpha \leq Z \leq \beta) \quad \text{が成り立つ。}$$

[2] Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うから、正規分布表を用いて $P(\alpha \leq Z \leq \beta)$, すなわち、 $P(a \leq X \leq b)$ を求めることができる。

解答 $Z = \frac{X-2}{5}$ とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$(1) X=2 \text{ のとき } Z = \frac{2-2}{5} = 0$$

$$X=12 \text{ のとき } Z = \frac{12-2}{5} = 2$$

$$\text{よって } P(2 \leq X \leq 12) = P(0 \leq Z \leq 2) = p(2) = 0.4772 \quad \text{答}$$

$$(2) X=0 \text{ のとき } Z = \frac{0-2}{5} = -0.4$$

$$X=5 \text{ のとき } Z = \frac{5-2}{5} = 0.6$$

$$\begin{aligned} \text{よって } P(0 \leq X \leq 5) &= P(-0.4 \leq Z \leq 0.6) \\ &= P(-0.4 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.6) \\ &= P(0 \leq Z \leq 0.4) + P(0 \leq Z \leq 0.6) = p(0.4) + p(0.6) \\ &= 0.1554 + 0.2257 = 0.3811 \quad \text{答} \end{aligned}$$

D 正規分布の応用

教 p.81

練習 24

教科書の応用例題 2 の県における高校 2 年生の男子を考えると、次の問いに答えよ。ただし、小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

- (1) 身長 180 cm 以上の人は、約何%いるか。
- (2) 高い方から 3% 以内の位置にいる人の身長は何 cm 以上か。
- (3) 身長が 165 cm 以上 170 cm 以下の人は、約何%いるか。

指針 正規分布の応用 身長 X cm に対して、(1)は $P(X \geq 180)$, (2)は $P(X \geq a) = 0.03$

となる a の値, (3)は $P(165 \leq X \leq 170)$ をそれぞれ求める。 $Z = \frac{X-170.5}{5.4}$ とお

いて、標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に変換して、正規分布表を利用して考える。

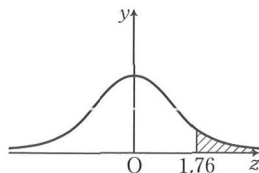
解答 身長を X cm とする。確率変数 X が正規分布 $N(170.5, 5.4^2)$ に従うとき、

$$Z = \frac{X-170.5}{5.4} \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

$$(1) X=180 \text{ のとき}$$

$$Z = \frac{180-170.5}{5.4} \div 1.76 \text{ であるから}$$

$$P(X \geq 180) = P(Z \geq 1.76)$$



$$=0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.76)$$

$$=0.5 - p(1.76)$$

$$=0.5 - 0.4608 = 0.0392$$

よって、約 3.9% いる。 答

- (2) 高い方から 3% 以内の位置にいる

人の身長を a cm 以上とし、

$$u = \frac{a - 170.5}{5.4} \text{ とすると}$$

$$P(Z \geq u) = P(X \geq a) = 0.03$$

$$\text{よって、} 0.5 - P(0 \leq Z \leq u) = 0.03$$

$$\text{すなわち } 0.5 - p(u) = 0.03 \text{ より}$$

$$p(u) = 0.47$$

$$\text{正規分布表より } u \doteq 1.88$$

$$\frac{a - 170.5}{5.4} \doteq 1.88 \text{ より } a \doteq 1.88 \times 5.4 + 170.5 = 180.652$$

したがって 180.7 cm 以上 答

- (3) $X = 165$ のとき

$$Z = \frac{165 - 170.5}{5.4} \doteq -1.02$$

$X = 170$ のとき

$$Z = \frac{170 - 170.5}{5.4} \doteq -0.09$$

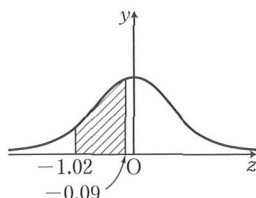
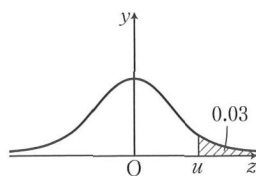
$$\text{よって } P(165 \leq X \leq 170)$$

$$= P(-1.02 \leq Z \leq -0.09) = P(0.09 \leq Z \leq 1.02)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.02) - P(0 \leq Z \leq 0.09)$$

$$= p(1.02) - p(0.09) = 0.3461 - 0.0359 = 0.3102$$

したがって、約 31.0% いる。 答



E 二項分布の正規分布による近似

教 p.82

練習
25

1 個のさいころを 180 回投げて、1 の目が出る回数を X とするとき、 $20 \leq X \leq 45$ となる確率を、教科書の例題 4 にならって求めよ。

指針 二項分布の正規分布による近似 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき、 $m = np$ 、 $\sigma^2 = np(1-p)$ で、 X は近似的に正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う。よって、

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \text{ とおけば、} Z \text{ は標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従うとみなせるから、} X$$

に関する条件を Z に関する条件に変換して確率を求めることができる。

解答 1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ で、 X は二項分布 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30, \quad \sigma = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 5$$

よって、 $Z = \frac{X-30}{5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$X=20 \text{ のとき } Z = \frac{20-30}{5} = -2$$

$$X=45 \text{ のとき } Z = \frac{45-30}{5} = 3$$

であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} P(20 \leq X \leq 45) &= P(-2 \leq Z \leq 3) = P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 3) = \phi(2) + \phi(3) \\ &= 0.4772 + 0.49865 = 0.97585 \quad \text{答} \end{aligned}$$

コラム 偏差値

練習

教 p.84

得点 X が平均 m 、標準偏差 σ の正規分布に従うとみなすとき、

$$T = 10 \times \frac{X-m}{\sigma} + 50 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

で得られる偏差値 T の平均(期待値)は50、標準偏差は10であることを確かめてみよう。

指針 偏差値の平均、標準偏差 X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うから、
 $E(X) = m$, $\sigma(X) = \sigma$ である。これより、確率変数 X に対し、
 $E(aX+b) = aE(X)+b$, $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$ が成り立つことを利用する。

解答 $T = 10 \times \frac{X-m}{\sigma} + 50 = \frac{10}{\sigma} \cdot X - \frac{10m}{\sigma} + 50$

X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うから $E(X) = m$, $\sigma(X) = \sigma$

よって、偏差値 T の平均、すなわち期待値は

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\frac{10}{\sigma} \cdot X - \frac{10m}{\sigma} + 50\right) = \frac{10}{\sigma} E(X) - \frac{10m}{\sigma} + 50 \\ &= \frac{10}{\sigma} \cdot m - \frac{10m}{\sigma} + 50 = 50 \end{aligned}$$

また、偏差値 T の標準偏差は

$$\sigma(T) = \sigma\left(\frac{10}{\sigma} \cdot X - \frac{10m}{\sigma} + 50\right) = \left|\frac{10}{\sigma}\right| \sigma(X) = \frac{10}{\sigma} \cdot \sigma = 10 \quad \text{終}$$

練習

次の文章のうち、正しいものをすべて選ぼう。

- ① 100 点満点の試験の偏差値は 100 を超えることもある。
- ② 100 点満点の試験の偏差値は負の数になることはない。
- ③ ある人の異なる 2 つの試験の結果について、得点の高い方が偏差値も高い。

2 章

統計的な推測

指針 偏差値の性質の正誤判定 たとえば、①については、多くの受験者の得点が低い得点に集中している場合に 1 人だけ高得点の者がいるというような極端なモデルを設定し、高得点の者の偏差値がどうなるかを考えて正誤の見当をつける。②についても、①とは逆の形の極端なモデルを考えるとよい。③については、試験のモデルを 2 つ設定して考える。

解答 ① たとえば、54 人が受験した 100 点満点のテストで、100 点が 1 人、40 点が 51 人、10 点が 2 人のとき、平均点を m 点、標準偏差を σ 点とすれば

$$m = \frac{1 \cdot 100 + 51 \cdot 40 + 2 \cdot 10}{54} = \frac{2160}{54} = 40$$

$$\text{また } \sigma^2 = \frac{1 \cdot (100-40)^2 + 51 \cdot (40-40)^2 + 2 \cdot (10-40)^2}{54} = \frac{5400}{54} = 100$$

$$\text{より } \sigma = 10 \quad \text{このとき、100 点の人の偏差値は } 10 \times \frac{100-40}{10} + 50 = 110$$

したがって、偏差値が 100 を超えることもある。

② たとえば、54 人が受験した 100 点満点のテストで、90 点が 2 人、60 点が 51 人、0 点が 1 人のとき、平均点を m 点、標準偏差を σ 点とすれば

$$m = \frac{2 \cdot 90 + 51 \cdot 60 + 1 \cdot 0}{54} = \frac{3240}{54} = 60$$

$$\text{また } \sigma^2 = \frac{2 \cdot (90-60)^2 + 51 \cdot (60-60)^2 + 1 \cdot (0-60)^2}{54} = \frac{5400}{54} = 100$$

$$\text{より } \sigma = 10 \quad \text{このとき、0 点の人の偏差値は } 10 \times \frac{0-60}{10} + 50 = -10$$

したがって、偏差値が負の数になることがある。

③ 平均点と標準偏差がそれぞれ①、②で設定したものと同じであるテストを①'、②'とする。たとえば、ある人が①'のテストで 80 点、②'のテストで 90 点取ったとする。このとき、①'のテストの偏差値は

$$10 \times \frac{80-40}{10} + 50 = 90$$

$$\text{また、②'のテストの偏差値は } 10 \times \frac{90-60}{10} + 50 = 80$$

したがって、得点の高い方が偏差値も高いとは限らない。

以上により、正しいものは ① ㊞

第2章 第1節

問題

教 p.85

- 1 番号1の札が3枚、番号2の札が4枚、番号3の札が5枚入った箱から札を1枚取り出し、その札の番号を X とする。 X の期待値、分散、および標準偏差を求めよ。

指針 確率変数の期待値、分散、標準偏差 X の確率分布の表を作り、 $E(X)$ をまず求める。次に、分散を $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を用いて求める。

解答 X のとりうる値は1, 2, 3で、 X の確率

分布は右の表のようになる。

X の期待値は

X	1	2	3	計
P	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	1

$$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{12} + 2 \cdot \frac{4}{12} + 3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

$$\text{また } E(X^2) = 1^2 \cdot \frac{3}{12} + 2^2 \cdot \frac{4}{12} + 3^2 \cdot \frac{5}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

であるから、 X の分散は

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{16}{3} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{23}{36} \end{aligned}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{23}{36}} = \frac{\sqrt{23}}{6}$$

□ 期待値 $\frac{13}{6}$, 分散 $\frac{23}{36}$, 標準偏差 $\frac{\sqrt{23}}{6}$

教 p.85

- 2 確率変数 X の期待値を m 、標準偏差を σ とする。 $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ とおくと、確率変数 Y の期待値と標準偏差を求めよ。

指針 $aX+b$ の期待値と標準偏差 X を確率変数、 a, b を定数とすると

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

解答 X の期待値は $E(X) = m$

X の標準偏差は $\sigma(X) = \sigma$

Y の期待値は

$$E(Y) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = E\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{m}{\sigma} = \frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma} = 0$$

Y の標準偏差は

$$\begin{aligned}\sigma(Y) &= \sigma\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \sigma\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma}\right) \\ &= \left|\frac{1}{\sigma}\right| \cdot \sigma(X) = \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma = 1\end{aligned}$$

図 期待値 0, 標準偏差 1

教 p.85

2 章

統計的な推測

- 3 互いに独立な確率変数 X と Y の確率分布が次の表で与えられているとき, 和 $X+Y$ の期待値と分散および標準偏差を求めよ。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

指針 確率変数の和の期待値, 分散, 標準偏差 次のことを用いる。

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) \quad (X, Y \text{ は互いに独立})$$

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{V(X+Y)}$$

解答 X, Y の期待値は

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{4}{10} + 2 \cdot \frac{5}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

よって, $X+Y$ の期待値は

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{7}{5} + \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$$

また, $E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{10} + 1^2 \cdot \frac{4}{10} + 2^2 \cdot \frac{5}{10} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$ であるから

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{12}{5} - \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{11}{25}$$

$E(Y^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{6}{10} + 2^2 \cdot \frac{1}{10} = 1$ であるから

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

X, Y は互いに独立であるから, $X+Y$ の分散は

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) = \frac{11}{25} + \frac{9}{25} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

また, $X+Y$ の標準偏差は

まずは $E(X), E(Y)$
を求めよう。



$$\sigma(X+Y)=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

☐ 期待値 $\frac{11}{5}$, 分散 $\frac{4}{5}$, 標準偏差 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

教 p.85

- 4 ある製品が不良品である確率は 0.01 であるという。この製品 1000 個の中の不良品の個数を X とするとき、 X の期待値と分散および標準偏差を求めよ。

指針 二項分布の期待値, 分散の応用 製品を 1 個取り出すという試行を 1000 回繰り返したときに, 不良品を取り出す回数を X と考える。このとき, X は二項分布に従う。確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき, $E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$ であることを用いる。

解答 製品を 1 個取り出すという試行で, 不良品を取り出すという事象を A とすると, A の起こる確率は $0.01=\frac{1}{100}$ である。

製品 1000 個の中の不良品の個数 X は, この試行を 1000 回繰り返す反復試行において, A が起こる回数と考えられるので, X は二項分布 $B\left(1000, \frac{1}{100}\right)$ に従う。

$$X \text{ の期待値は } E(X)=1000 \cdot \frac{1}{100}=10$$

$$X \text{ の分散は } V(X)=1000 \cdot \frac{1}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = 1000 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100} = \frac{99}{10}$$

$$X \text{ の標準偏差は } \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{99}{10}}=\frac{3\sqrt{110}}{10}$$

☐ 期待値 10, 分散 $\frac{99}{10}$, 標準偏差 $\frac{3\sqrt{110}}{10}$

教 p.85

- 5 1 枚の硬貨を 400 回投げるとき, 表の出る回数 X が $\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05$ の範囲にある確率を, 正規分布表を用いて求めよ。

指針 二項分布の正規分布による近似 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 X の期待値 m , 標準偏差 σ は, $m=np$, $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$ であり,

$$Z=\frac{X-m}{\sigma} \text{ は近似的に標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

解答 1 枚の硬貨を 1 回投げて表の出る確率は $\frac{1}{2}$ であるから, X は二項分布

$B\left(400, \frac{1}{2}\right)$ に従う。

X の期待値は $m = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$

X の標準偏差は $\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = 10$

よって、 $Z = \frac{X-200}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$\text{ここで} \quad \frac{X}{400} - \frac{1}{2} = \frac{10Z+200}{400} - \frac{1}{2} = \frac{Z}{40}$$

$$\leftarrow X = 10Z + 200$$

したがって

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{X}{400} - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) &= P\left(\frac{|Z|}{40} \leq 0.05\right) = P(|Z| \leq 2) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) = 2\phi(2) \\ &= 2 \times 0.4772 = 0.9544 \quad \text{答} \end{aligned}$$

教 p.85

- 6 確率変数 X のとる値の範囲が $0 \leq X \leq 2$ で、その確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられている。ただし、 a は正の定数とする。

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \leq x \leq 1) \\ a(2-x) & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

- (1) a の値を求めよ。
(2) $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$ を求めよ。

指針 確率密度関数

- (1) 分布曲線 (本問の場合は折れ線) $y=f(x)$ と x 軸が囲む部分の面積が 1 になることから a の値が定まる。
(2) $y=f(x)$ と x 軸、2 直線 $x=0.5$, $x=1.5$ が囲む部分の面積を求めればよい。

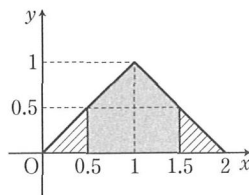
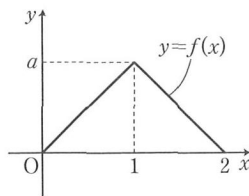
解答 $y=f(x)$ のグラフを図示すれば、右図のようになる。

- (1) $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積が 1 であるから

$$\frac{1}{2} \times 2 \times a = 1 \text{ より } a = 1 \quad \text{答}$$

- (2) (1)より、 $a=1$ であるから、

$P(0.5 \leq X \leq 1.5)$ は、右の図の影の部分の面積に等しい。よって、全体の面積 1 から斜線部分の 2 つの直角二等辺三角形の面積の和を引けば



$$P(0.5 \leq X \leq 1.5) \\ = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 0.5^2 \right) = 0.75 \quad \text{答}$$

グラフをかいて
対称性に注目しよう。



別解 (1) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 ax \, dx + \int_1^2 a(2-x) dx$

$$= a \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + a \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

この値が^{*}1になればよいから $a=1$ 答

(2) (1)より, $a=1$ であるから $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 2-x & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$

したがって

$$P(0.5 \leq X \leq 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} f(x) dx = \int_{0.5}^1 x \, dx + \int_1^{1.5} (2-x) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.5}^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^{1.5} = 0.375 + 0.375 = 0.75 \quad \text{答}$$

第2節 統計的な推測

6 母集団と標本

まとめ

2章

統計的な推測

1 全数調査と標本調査

統計的な調査には、対象全体からデータを集めて調べる **全数調査** と、対象全体からその一部を抜き出して調べる **標本調査** という方法がある。

標本調査の場合、調査の対象全体を **母集団**、母集団に属する個々の対象を **個体**、個体の総数を **母集団の大きさ** という。また、調査のために母集団から抜き出された個体の集合を **標本** といい、母集団から標本を抜き出すことを **抽出** という。標本に属する個体の総数を **標本の大きさ** という。

2 無作為抽出

標本調査の目的は、抽出された標本から母集団のもつ性質を正しく推測することであり、標本が偏りなく公平に抽出されることが必要である。

母集団の各個体を等しい確率で抽出する方法を **無作為抽出** といい、無作為抽出で選ばれた標本を **無作為標本** という。無作為抽出では、乱数さいや乱数表などが使われる。

3 復元抽出と非復元抽出

母集団から標本を抽出するのに、毎回もとにもどしながら個体を1個ずつ抽出することを **復元抽出**、個体をもとにもどさないで標本を抽出することを **非復元抽出** という。

例 袋の中の玉を1個ずつ取り出すとき、取り出した玉をもとにもどす場合は復元抽出、もとにもどさない場合は非復元抽出である。

4 変量

統計的な調査の対象には、身長、血液型、不良品の個数などのように、特定の性質がある。これを特性といい、特性を表すものを **変量** という。

5 母集団分布

大きさ N の母集団において、変量 x のとりうる異なる値を $x_1, x_2, \dots, x_r$ とし、それぞれの値をとる個体の個数を $f_1, f_2, \dots, f_r$ とする。

このとき、この母集団から1個の個体を無作為に抽出して、変量 x の値を X とすると、 X は確率変数であり、その確率分布は右の表のようになる。

X	x_1	x_2	$\dots$	x_r	計
P	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	$\dots$	$\frac{f_r}{N}$	1

$(N=f_1+f_2+\dots+f_r)$

この X の確率分布を **母集団分布** という。また、確率変数 X の期待値、標準偏差を、それぞれ **母平均**、**母標準偏差** といい、 m, σ で表す。 m, σ は、母集団における変量 x の平均値、標準偏差にそれぞれ一致する。

A 全数調査と標本調査 B 無作為抽出の方法 C 復元抽出と非復元抽出

教 p.88

練習
26

教科書の例 19 において、標本を 1 枚ずつ非復元抽出し、抜き出した順序を区別しないとき、大きさ 5 の標本の総数をいえ。

指針 非復元抽出と標本の総数 100 枚の中から 5 枚を選ぶ組合せの総数に等しい。

解答 100 枚の札の中から、取り出した札をもとにもどさないで 5 枚選ぶときの選び方の総数であるから

$${}_{100}C_5 = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ = 75287520 \quad \text{答}$$

D 母集団分布

教 p.89

練習
27

右の表は、40 枚の札に書かれた数字とその枚数である。40 枚を母集団、札の数字を変量とするとき、母集団分布を求めよ。また、母平均、母標準偏差を求めよ。

数字	1	2	3	4	5	計
枚数	2	6	24	6	2	40

指針 母集団分布・母平均・母標準偏差 40 枚から 1 枚を無作為抽出したときの札の数字を X として、 X の確率分布を求め、期待値、標準偏差を計算する。

解答 40 枚の札から 1 枚の札を無作為に抽出し、その札の数字を X とすると、与えられた度数分布表から、 X の確率分布、すなわち母集団分布は下の表のようになる。

$$\text{答}$$

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

母平均 m は

$$m = 1 \cdot \frac{1}{20} + 2 \cdot \frac{3}{20} + 3 \cdot \frac{12}{20} + 4 \cdot \frac{3}{20} + 5 \cdot \frac{1}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

母標準偏差 σ について

$$\sigma^2 = (1-3)^2 \cdot \frac{1}{20} + (2-3)^2 \cdot \frac{3}{20} + (3-3)^2 \cdot \frac{12}{20} + (4-3)^2 \cdot \frac{3}{20} + (5-3)^2 \cdot \frac{1}{20} \\ = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

$$\text{よって } \sigma = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$$

答 母平均 3, 母標準偏差 $\frac{\sqrt{70}}{10}$

7 標本平均の分布

まとめ

2章

統計的な推測

1 標本平均

母集団から大きさ n の無作為標本を抽出し、それらの変量 x の値を

$X_1, X_2, \dots, X_n$ とするとき、 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ を 標本平均 という。

n を固定すると、標本平均 $\bar{X}$ は 1 つの確率変数になる。

2 標本平均の期待値と標準偏差

母平均 m 、母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき、その標本平均 $\bar{X}$ の期待値 $E(\bar{X})$ と標準偏差 $\sigma(\bar{X})$ は

$$E(\bar{X}) = m, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3 標本平均の分布と正規分布

母平均 m 、母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について、標本平均 $\bar{X}$ は、 n が大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従

うとみなすことができる。したがって、 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は、 n が大きいとき、近

似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

注意 母集団分布が正規分布のときは、 n が大きくなくても、常に $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うことが知られている。

4 母比率と標本比率

一般に、母集団の中である特性 A をもつものの割合を、その特性 A の 母比率 という。また、抽出された標本の中で特性 A をもつものの割合を 標本比率 という。

5 標本比率と正規分布

特性 A の母比率 p の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について、標本比率 R は、 n が大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$ (ただし、 $q=1-p$) に従うとみなすことができる。

6 大数の法則

母平均 m の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき、 n が大きくなるに従って、その標本平均 $\bar{X}$ はほとんど確実に母平均 m に近づく。これを 大数の法則 という。

A 標本平均の期待値と標準偏差

教 p.92

練習
28

母平均 170, 母標準偏差 8 の十分大きい母集団から, 大きさ 16 の標本を抽出するとき, その標本平均 $\bar{X}$ の期待値と標準偏差を求めよ。

指針 標本平均の期待値と標準偏差 母平均 m , 母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき, 標本平均 $\bar{X}$ の期待値, 標準偏差は

$$E(\bar{X}) = m, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

解答 $\bar{X}$ の期待値は $E(\bar{X}) = 170$

$$\bar{X} \text{ の標準偏差は } \sigma(\bar{X}) = \frac{8}{\sqrt{16}} = \frac{8}{4} = 2$$

☐ 期待値 170, 標準偏差 2

B 標本平均の分布と正規分布

教 p.93

練習
29

教科書の応用例題 3 において, 標本の大きさを 400 とするとき, 標本平均 $\bar{X}$ が 48 より小さい値をとる確率を求めよ。

指針 標本平均の分布と正規分布 母平均 m , 母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均 $\bar{X}$ は, n が大きいとき, 近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなせるから, $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

解答 標本の大きさは $n=400$, 母標準偏差は $\sigma=20$ であるから, 標本平均 $\bar{X}$ の標準偏差は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{400}} = 1$

$$\text{また, 母平均は } m=50 \text{ であるから, } Z = \frac{\bar{X} - 50}{1} = \bar{X} - 50$$

は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$\bar{X}=48 \text{ のとき } Z=48-50=-2$$

$$\text{よって } P(\bar{X} < 48) = P(Z < -2) = P(Z > 2)$$

$$= 0.5 - p(2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \quad \text{☐}$$

標準正規分布に
直して考えよう。



C 標本比率と正規分布

教 p.94

練習
30

不良品が全体の 10% 含まれる大量の製品の山から大きさ 100 の無作為標本を抽出するとき、不良品の標本比率 R について、次の問いに答えよ。

- (1) R は近似的にどのような正規分布に従うとみなすことができるか。
- (2) $0.07 \leq R \leq 0.13$ となる確率を求めよ。

指針 標本比率と正規分布 母比率 p の母集団から抽出された大きさ n の無作為標

本の標本比率 R は、 n が大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$

(ただし、 $q=1-p$) に従うとみなせる。

- (1) $p=0.1$, $n=100$ として考える。
- (2) 標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に変換して考える。

解答 (1) 母比率 0.1 の母集団から、大きさ 100 の無作為標本を抽出するから、標

本比率 R は近似的に正規分布 $N\left(0.1, \frac{0.1 \times 0.9}{100}\right)$, すなわち

$N(0.1, 0.03^2)$ に従う。 答

- (2) (1) から、 $Z = \frac{R-0.1}{0.03}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$R=0.07$ のとき $Z=-1$, $R=0.13$ のとき $Z=1$ であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} P(0.07 \leq R \leq 0.13) &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2p(1) \\ &= 2 \times 0.3413 = 0.6826 \quad \text{答} \end{aligned}$$

D 大数の法則

教 p.95

練習
31

1 枚の硬貨を n 回投げるとき、表の出る相対度数を R とする。次の各場合について、確率 $P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right)$ の値を求めよ。

- (1) $n=100$
- (2) $n=400$
- (3) $n=900$

指針 標本比率と大数の法則 本問はいろいろな考え方ができるが、次のような方針によって解くとわかりやすい。

- ① 表の出る回数を X とすると、確率変数 X は二項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従い、

2 章

統計的な推測

正規分布で近似できる。

② 相対度数 R は $R = \frac{X}{n}$ となり, R もまた正規分布で近似できる。

③ R を標準正規分布に従う確率変数 Z に変換して確率を求める。

解答 硬貨を n 回投げるとき, 表の出る回数を X とすると, X は二項分布

$B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従い, n が大きいとき, 近似的に正規分布 $N\left(n \cdot \frac{1}{2}, n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$,

すなわち $N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$ に従う。このとき, 表の出る相対度数 $R = \frac{X}{n}$ は近似的

に正規分布 $N\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2}, \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{4}\right)$, すなわち $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4n}\right)$ に従い,

$Z = \frac{R - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$R - \frac{1}{2} = \frac{Z}{2\sqrt{n}}$ であるから, $\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05$ のとき $\frac{|Z|}{2\sqrt{n}} \leq 0.05$

$$\begin{aligned} (1) \quad P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) &= P\left(\frac{|Z|}{2\sqrt{100}} \leq 0.05\right) = P(|Z| \leq 1) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2\phi(1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) &= P\left(\frac{|Z|}{2\sqrt{400}} \leq 0.05\right) = P(|Z| \leq 2) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2\phi(2) = 2 \times 0.4772 = 0.9544 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) &= P\left(\frac{|Z|}{2\sqrt{900}} \leq 0.05\right) = P(|Z| \leq 3) \\ &= P(-3 \leq Z \leq 3) = 2P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 2\phi(3) = 2 \times 0.49865 = 0.9973 \quad \text{答} \end{aligned}$$

補足 教科書 p.78 の最初で述べられているように, 確率変数 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき, $aX + b$ は正規分布 $N(am + b, a^2\sigma^2)$ に従うことが知られている。このことから, **解答**において, $\sim$ で示した事柄が成り立つ。

参考 本問の結果が示す意味について考えてみよう。硬貨を n 回投げて, k 回目に表が出るとき $X_k = 1$, 裏が出るとき $X_k = 0$

となる確率変数を $X_k (k=1, 2, \dots, n)$ とする。

このとき, 各 X_k は右のような母集団分布に従う

確率変数と考えられ, その母平均は

$$m = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ である。}$$

一方, 標本平均 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ は相対度数 R に一致するから,

X	1	0	計
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$$P\left(\left|R - \frac{1}{2}\right| \leq 0.05\right) = P\left(|\bar{X} - 0.5| \leq 0.05\right) = P(0.45 \leq \bar{X} \leq 0.55)$$

となる。ここで、(1)~(3)の結果から

$$n=100 \text{ のとき } P(0.45 \leq \bar{X} \leq 0.55) = 0.6826$$

$$n=400 \text{ のとき } P(0.45 \leq \bar{X} \leq 0.55) = 0.9544$$

$$n=900 \text{ のとき } P(0.45 \leq \bar{X} \leq 0.55) = 0.9973$$

なので、 n が大きくなるにつれて、標本平均 $\bar{X}$ が母平均 0.5 に近い値をとる確率が 1 に近づいていることがわかり、大数の法則が成り立つことが示唆されている。

8 推定

まとめ

1 母平均の推定

母標準偏差を σ とする。標本の大きさ n が大きいとき、母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は、標本平均を $\bar{X}$ とすると

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

注意 母平均 m に対して信頼度 95% の信頼区間を求めることを「母平均 m を信頼度 95% で推定する」ということがある。

2 母平均の推定 (母標準偏差がわからないとき)

母平均の推定において、標本の大きさ n が大きいときは、母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いても差し支えないことが知られている。

3 母比率の推定

標本の大きさ n が大きいとき、標本比率を R とすると、母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[R - 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}, R + 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right]$$

A 母平均の推定

教 p.98

練習 32

大量に生産されたある製品の中から、100 個を無作為抽出して長さを測ったところ、平均値 103.4cm、標準偏差 1.5cm であった。この製品の平均の長さ m cm に対して、信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

指針 母平均の推定 母標準偏差 σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いる。このとき、標本平均を $\bar{X}$ 、標本の大きさを n とすると、母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

また、標本をとるとき、得られる平均値は $\bar{X}$ の実現値 (実際に観測された値) で変数ではない。そのため、下の解答では小文字の $\bar{x}$ を用いている。

解答 標本の平均値は $\bar{x} = 103.4$ 、標本の標準偏差は $S = 1.5$ 、標本の大きさは $n = 100$ であるから

$$1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{100}} \doteq 0.3$$

よって、求める信頼区間は

$$[103.4 - 0.3, 103.4 + 0.3]$$

すなわち $[103.1, 103.7]$ ただし、単位は cm 〆

B 母比率の推定

教 p.99

練習
33

教科書の例題 6 において、標本の大きさが 900 人のときは、A 政党の支持者は 324 人いた。A 政党の支持者の母比率 p に対して、信頼度 95 % の信頼区間を求めよ。

指針 母比率の推定 標本比率を R 、標本の大きさを n とすると、母比率 p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[R - 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}, R + 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right]$$

解答 標本比率 R は

$$R = \frac{324}{900} = 0.36$$

$n = 900$ であるから

$$\begin{aligned} 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} &= 1.96 \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{900}} \\ &= 1.96 \times 0.016 \doteq 0.031 \end{aligned}$$

よって、求める信頼区間は

$$[0.36 - 0.031, 0.36 + 0.031]$$

すなわち $[0.329, 0.391]$ 〆

9 仮説検定

まとめ

2章

統計的な推測

1 仮説検定

母集団に関して考えた仮定を 仮説 といい、標本から得られた結果によって、この仮説が正しいか正しくないかを判断する方法を 仮説検定 という。また、仮説が正しくないと判断することを、仮説を 棄却する という。

たとえば、「硬貨 A は表と裏の出やすさに偏りがある」かどうかを仮説検定によって判断するときには、判断したい主張、すなわち

[1] 硬貨 A の表の出る確率 p は $p=0.5$ ではない

に対し、これに反する仮定として

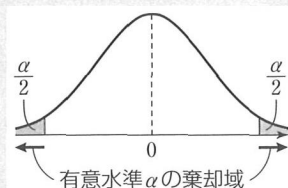
[2] 硬貨 A の表の出る確率 p は $p=0.5$ である

を立てる。そして、[2] の仮定のもとでの議論の結果、[2] が正しくないと判断されればこれを棄却し、[1] の主張が正しいと判断することになる。

補足 上の例のように、正しいかどうか判断したい主張 [1] に反する仮定として立てた主張 [2] を 帰無仮説 といい、主張 [1] を 対立仮説 という。

2 有意水準と棄却域

仮説検定では、まず、どの程度小さい確率の事象が起こると仮説を棄却するか、という基準をあらかじめ定めておく。この基準となる確率 α を 有意水準 という。有意水準 α は、0.05 (5%) または 0.01 (1%) と定めることが多い。



有意水準 α に対して、仮説が棄却されるような確率変数の値の範囲が定まる。この範囲を有意水準 α の 棄却域 という。

3 仮説検定の手順

- ① ある事象が起こった状況や原因を推測し、仮説 (帰無仮説) を立てる。
- ② 有意水準 α を定め、仮説にもとづいて棄却域を定める。
- ③ 標本から得られた確率変数の値が棄却域に入れば仮説を棄却し、棄却域に入らなければ仮説を棄却しない。

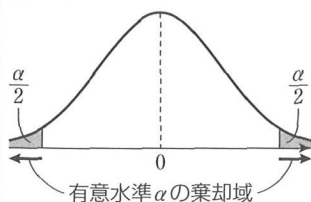
注意 有意水準 α で仮説検定を行うことを、「有意水準 α で 検定 する」ということがある。

4 両側検定と片側検定

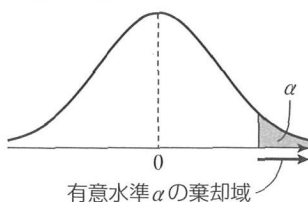
たとえば、硬貨の表の出る確率を p とするとき、判断したい主張が「 $p \neq 0.5$ 」である場合には、標本から得られた結果 (確率変数の値) が有意水準より大きくても、小さくても仮説 ($p=0.5$) が棄却されるように、棄却域を両側にとって検定を行う。このような検定を 両側検定 という。

これに対し、判断したい主張が「 $p > 0.5$ 」である場合には、標本から得られた結果が有意水準より大きい場合にのみ仮説 ($p = 0.5$) が棄却されるように、棄却域を片側にのみとって検定を行う。このような検定を 片側検定 という。

両側検定



片側検定



A 仮説検定

教 p.103

練習
34

ある1個のさいころを180回投げたところ、1の目が24回出た。
このさいころは、1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよい
か。有意水準5%で検定せよ。

指針 両側検定 「1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である」という仮説を立てると、1の目が出る回数 X は二項分布 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ に従う。 X を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に変換し、 $X = 24$ に対応する Z の値が有意水準5%の棄却域(両側にある)に入るかどうかで判断する。

解答 1の目が出る確率を p とする。

1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ でなければ、 $p \neq \frac{1}{6}$ である。

ここで、「1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である」、すなわち $p = \frac{1}{6}$ という仮説を立てる。
この仮説が正しいとすると、180回のうち1の目が出る回数 X は、二項分布 $B\left(180, \frac{1}{6}\right)$ に従う。 X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 180 \times \frac{1}{6} = 30, \quad \sigma = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 5$$

よって、 $Z = \frac{X - 30}{5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ であるから、有意水準5%の棄却域は $Z \leq -1.96$ または $1.96 \leq Z$

$X=24$ のとき $Z=\frac{24-30}{5}=-1.2$ であり、この値は棄却域に入らないから、仮説を棄却できない。

したがって、この結果からは、1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないとは判断できない。 答

注意 教科書 p.102 の例 23 や本問では、「仮説を棄却できない」という判断をしているが、仮説が正しいと判断しているわけではない。たとえば、本問の場合では、仮説を積極的に肯定し、「1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である」と主張しているわけではない。

練習 35

教 p.104

ある種子の発芽率は従来 75% であったが、品種改良した新しい種子から無作為に 300 個を抽出して種をまいたところ、237 個が発芽した。品種改良によって発芽率は上がったと判断してよいか。有意水準 5% で検定せよ。

指針 **片側検定** 新しい種子の発芽率を p とし、「発芽率は上がらなかった」、すなわち、「 $p=0.75$ 」という仮説を立てると、発芽する種子の個数 X は二項分布 $B(300, 0.75)$ に従う。 X を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に変換し、 $X=237$ に対応する Z の値が有意水準 5% の棄却域 (片側のみ) に入るかどうかで判断する。

解答 品種改良した新しい種子の発芽率を p とする。

品種改良によって発芽率が上がったなら、 $p > 0.75$ である。

ここで、「品種改良によって発芽率は上がらなかった」、すなわち $p=0.75$ という仮説を立てる。この仮説が正しいとすると、300 個のうち発芽する種子の個数 X は、二項分布 $B(300, 0.75)$ に従う。 X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 300 \times 0.75 = 225, \quad \sigma = \sqrt{300 \times 0.75 \times 0.25} = 7.5$$

よって、 $Z = \frac{X-225}{7.5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

正規分布表より $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ であるから、有意水準 5% の棄却域は $Z \geq 1.64$

$X=237$ のとき $Z = \frac{237-225}{7.5} = 1.6$ であり、この値は棄却域に入らないから、仮説を棄却できない。

したがって、品種改良によって発芽率が上がったとは判断できない。 答



深める

教科書 102 ページの例 23 において、「コインは表が出にくい」と判断してよいかを、片側検定を用いて、有意水準 5% で検定してみよう。

指針 片側検定 判断したい主張を「 $p < 0.5$ 」、仮説を「 $p = 0.5$ 」としたうえで、例 23 と同様に行う。最後に、得られた値が有意水準 5% の片側検定の棄却域に入るかどうか確認する。

解答 表が出る確率を p とする。表が出にくいなら、 $p < 0.5$ である。ここで、「表が出にくくない」、すなわち $p = 0.5$ という仮説を立てる。

この仮説が正しいとすると、400 回のうち表が出る回数 X は、二項分布 $B(400, 0.5)$ に従う。 X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 400 \times 0.5 = 200, \quad \sigma = \sqrt{400 \times 0.5 \times 0.5} = 10$$

よって、 $Z = \frac{X - 200}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.64 \leq Z \leq 0) = 0.45$ であるから、有意水準 5% の棄却域は $Z \leq -1.64$

$X = 183$ のとき $Z = \frac{183 - 200}{10} = -1.7$ であり、この値は棄却域に入るから、仮説は棄却できる。

すなわち、コインは表が出にくいと判断してよい。 答

コラム 標本の抽出方法

練習

標本の抽出方法について、どのような方法があるか調べてみよう。また、それらの抽出方法について、よい点や問題点をまとめてみよう。

(例 1) 系統抽出法

母集団に通し番号をつけ、乱数さいや乱数表などを用いて無作為に開始番号を選び、開始番号を基準に等間隔に個体を抜き出す方法を、系統抽出法という。抽出が簡単に行えるが、母集団の並び順に周期がある場合に抽出した標本に偏りが生じる。

(例 2) 2 段抽出法

1 段目の抽出として、母集団を地域など複数の部分集団(クラスター)に分割し、いくつかの部分集団を抽出する。次に、2 段目の抽出として、1 段目に抽出した部分集団から無作為に個体を抜き出す。このような方法を 2 段抽出法という。また、全国を母集団として、都道府県に分割してその中からいく

つかの都道府県を抽出し、抽出した都道府県を市区町村に分割しその中からいくつかの市区町村を抽出し、抽出した市区町村の中から個人を抽出する、といった段階をより多くして抽出を行う場合は多段抽出法という。母集団が大きい場合に、実際に調べる個体を少なく抑えられるため実施しやすい反面、段階を増やすほど標本の偏りが大きくなる。

(例3) 二相抽出法

母集団にいくつかの層(たとえば、性別、年代別、職業別など)が含まれているが、層の情報を十分に得られていない場合に、一相目に、層の情報を得るための無作為抽出を行い、二相目に、得られた層の情報をもとに層化無作為抽出を行う方法を二相抽出という。実際の調査においては、一相目に大規模な調査を行い必要な情報を得たうえで、二相目に標本の大きさの小さい調査を行うというようにすると、毎回大規模な調査を行う場合よりも調査実施のコストを抑えて抽出を行える。

第2章 第2節

問題

教 p.106

- 7 ある県の高校2年生の男子を母集団とすると、その身長の分布は平均170cm、標準偏差4cmの正規分布で近似された。この母集団から無作為に64人を抽出するとき、その64人の身長の平均が169cm以上171cm以下の範囲にある確率を求めよ。

指針 標本平均の分布と正規分布 母平均 m 、母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均 $\bar{X}$ は、 n が十分大きいとき、近似的に正

規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなせるから、 $Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ は近似的に標準正規分布

布 $N(0, 1)$ に従う。

解答 標本の大きさは $n=64$ 、母標準偏差は $\sigma=4$ であるから、標本平均 $\bar{X}$ の標準

偏差は $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{64}} = \frac{1}{2}$ また、母平均は $m=170$ であるから、

$$Z = \frac{\bar{X} - 170}{\frac{1}{2}} = 2(\bar{X} - 170) \text{ は近似的に標準正規分布 } N(0, 1) \text{ に従う。}$$

$$\bar{X}=169 \text{ のとき } Z=2(169-170)=-2$$

$$\bar{X}=171 \text{ のとき } Z=2(171-170)=2$$

$$\text{したがって } P(169 \leq \bar{X} \leq 171) = P(-2 \leq Z \leq 2)$$

$$=P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ = 2p(2) = 2 \times 0.4772 = 0.9544 \quad \text{答}$$

教 p.106

- 8 Z を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数とする。 $P(|Z| \leq a) = 0.99$ を満たす最も適切な a の値を、次の①～④のうちから 1 つ選べ。

① 1.75 ② 1.96 ③ 2.33 ④ 2.58

指針 標準正規分布と確率 条件式から、 $P(0 \leq Z \leq a)$ 、すなわち $p(a)$ の値を求め、 $p(a)$ に近い値を正規分布表で探す。

解答 $P(|Z| \leq a) = P(-a \leq Z \leq a) = P(-a \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq a) \\ = 2P(0 \leq Z \leq a) = 2p(a)$

$$2p(a) = 0.99 \text{ から } p(a) = 0.495$$

$$\text{正規分布表により } p(2.57) = 0.4949, p(2.58) = 0.4951$$

であるから、選択肢にある値のうち、 a の値として最も適切なものは 2.58 である。したがって ④ 答

教 p.106

- 9 ある工場で生産されている製品 A から 100 個の無作為標本を抽出して耐久時間を調べたところ、平均値は 1470 時間、標準偏差は 200 時間であった。この工場で生産される製品 A の平均耐久時間 m 時間に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 信頼度 95 % の信頼区間を求めよ。
 (2) 信頼度 99 % の信頼区間を求めよ。

指針 母平均の推定 母標準偏差の代わりに標本の標準偏差 S を用いる。また、標本平均を $\bar{X}$ 、標本の大きさを n とする。

- (1) 母平均 m に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

- (2) 標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数を Z とする。教科書 p.96 と同様にと考えると、信頼度 99 % の信頼区間は、 $P(|Z| \leq a) = 0.99$ を満たす a を用いて、 $\left[\bar{X} - a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$ と表されることがわかる。前問の 8 の結果を利用するとよい。

解答 標本の平均値は $\bar{X} = 1470$ 、標本の標準偏差は $S = 200$ 、標本の大きさは $n = 100$ である。

$$(1) \quad 1.96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} \div 39$$

よって、求める信頼区間は $[1470-39, 1470+39]$

すなわち $[1431, 1509]$ ただし、単位は時間 答

- (2) 標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数を Z とすると、母平均 m に対する信頼度 99% の信頼区間は、 $P(|Z| \leq a) = 0.99$ …… ①

$$\textcircled{1} \text{を満たす } a \text{ を用いて } \left[\bar{X} - a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + a \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \text{ …… } \textcircled{2}$$

と表される。ここで、前問 8 の結果により、①を満たす a は $a = 2.58$ であり、

$$\text{このとき} \textcircled{2} \text{は } \left[\bar{X} - 2.58 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 2.58 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \text{ となる。}$$

$$2.58 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \frac{200}{\sqrt{100}} \div 52$$

よって、求める信頼区間は $[1470-52, 1470+52]$

すなわち $[1418, 1522]$ ただし、単位は時間 答

(2)は信頼区間の公式を丸暗記するだけではできないよ。定義とその意味を理解しておこう。



教 p.106

10 ある1個のさいころを720回投げたところ、1の目が98回出た。このさいころは、1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよいか。有意水準5%で検定せよ。

指針 両側検定 判断したい主張は「1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではない」である。判断したい主張の数式による表現が「 $\neq$ 」で表されるときは両側検定を用いる。

解答 1の目が出る確率を p とする。

1の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ でなければ、 $p \neq \frac{1}{6}$ である。

ここで、「1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である」、すなわち

$p = \frac{1}{6}$ という仮説を立てる。

この仮説が正しいとすると、720回のうち1の目が

出る回数 X は、二項分布 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$ に従う。

まずは両側検定なのか片側検定なのかを最初に判断しよう。



X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 720 \times \frac{1}{6} = 120, \quad \sigma = \sqrt{720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 10$$

よって、 $Z = \frac{X-120}{10}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ であるから、有意水準 5% の棄却域は $Z \leq -1.96$ または $1.96 \leq Z$

$X = 98$ のとき $Z = \frac{98-120}{10} = -2.2$ であり、この値は棄却域に入るから、仮説は棄却できる。

すなわち、このさいころは、1 の目が出る確率が $\frac{1}{6}$ ではないと判断してよい。

答

教 p.106

- 11 A 社のある製品の不良率は従来 5% であったが、A 社が新たに開発した製法で作られた製品から 1900 個を無作為に抽出して調べたところ、不良品の数は 75 個であった。新製法により、不良率は従来より下がったと判断してよいか。有意水準 1% で検定せよ。

指針 **片側検定** 判断したい主張は「不良率が従来より下がった (低い)」である。判断したい主張の数式による表現が「 $<$ 」(または「 $>$ 」) で表されるときは片側検定を用いる。なお、有意水準は 1% (0.01) であることに注意する。

解答 新たに開発した製法で作られた製品の不良率を p とする。

新たに開発した製法によって不良率が従来より下がったなら、 $p < 0.05$ である。ここで、「新たに開発した製法によって不良率が従来より下がらなかった」、すなわち $p = 0.05$ という仮説を立てる。この仮説が正しいとすると、1900 個のうちの不良品の個数 X は、二項分布 $B(1900, 0.05)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 1900 \times 0.05 = 95, \quad \sigma = \sqrt{1900 \times 0.05 \times 0.95} = 9.5$$

よって、 $Z = \frac{X-95}{9.5}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-2.33 \leq Z \leq 0) = 0.49$ であるから、有意水準 1% の棄却域は $Z \leq -2.33$

$X = 75$ のとき $Z = \frac{75-95}{9.5} \div -2.1$ であり、この値は棄却域に入らないから、

仮説を棄却できない。

したがって、新たに開発した製法によって不良率が従来より下がったとは判断できない。 答

第2章 章末問題A

教 p.107

2章

統計的な推測

1. 1個のさいころを投げ、出た目が X のとき $100X$ 円もらえるゲームがある。ゲームの参加料は 300 円である。このゲームを 1 回行うときの利益を Y 円とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) Y を X で表せ。 (2) Y の期待値を求めよ。

指針 ゲームの期待値

- (1) (利益) = (賞金) - (参加料)
 (2) X の期待値を求め、 $E(aX+b) = aE(X) + b$ を利用する。

解答 (1) 出た目が X のとき、賞金は $100X$ 円で、参加料として 300 円払っている
 ので、利益 Y 円に対して

$$Y = 100X - 300 \quad \text{答}$$

- (2) X の確率分布は表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって、 X の期待値は

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

したがって、 Y の期待値は

$$E(Y) = E(100X - 300) = 100E(X) - 300 = 100 \cdot \frac{7}{2} - 300 = 50 \quad \text{答}$$

教 p.107

2. ある種子の発芽率は 80 % であるという。この種子を 400 個まいたときに発芽する個数を X とする。 X の期待値、標準偏差を求めよ。

指針 二項分布の期待値と標準偏差 反復試行と同じであるとみなせるから、 X は二項分布に従う。

確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき

$$\text{期待値は } E(X) = np \quad \text{標準偏差は } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

解答 X は二項分布 $B(400, 0.8)$ に従う

$$X \text{ の期待値は } E(X) = 400 \times 0.8 = 320$$

$$X \text{ の標準偏差は } \sigma(X) = \sqrt{400 \times 0.8 \times (1-0.8)} = \sqrt{64} = 8$$

答 期待値 320, 標準偏差 8

3. 正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従う確率変数 X に対して、確率 $P(|X-m|>k\sigma)$ が次の値になるように、定数 k の値を定めよ。
- (1) 0.006 (2) 0.242

指針 正規分布と確率 X を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に変換して、正規分布表を用いて調べる。

解答 X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うから、 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に

従う。 $X-m=\sigma Z$ より、 $|X-m|>k\sigma$ のとき $|\sigma Z|>k\sigma$

すなわち $|Z|>k$ よって $P(|X-m|>k\sigma)=P(|Z|>k)$

ここで、 $k \leq 0$ とすると $P(|Z|>k)=1$ となるから $k>0$

したがって $P(|Z|>k)=1-P(|Z|\leq k)=1-2P(0\leq Z\leq k)=1-2p(k)$

(1) $1-2p(k)=0.006$ より $p(k)=0.497$

正規分布表より $k \doteq 2.75$ 答

(2) $1-2p(k)=0.242$ より $p(k)=0.379$

正規分布表より $k \doteq 1.17$ 答

4. ある製品を作っている工場で不良品ができる確率は 0.02 であるという。この製品 2500 個の中に含まれる不良品の個数が 36 個以下である確率を求めよ。

指針 二項分布の正規分布による近似 不良品の個数を X とすると、 X は二項分布に従う。 X の期待値を m 、標準偏差を σ として、 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ とおくと、 Z は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

解答 製品を取り出すことを 2500 回繰り返す反復試行とみなし、不良品を取り出す回数を X とすると、 X は二項分布 $B(2500, 0.02)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m=2500 \times 0.02=50 \quad \sigma=\sqrt{2500 \times 0.02 \times 0.98}=\sqrt{49}=7$$

よって、 $Z = \frac{X-50}{7}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$X=0 \text{ のとき } Z=-\frac{50}{7} \quad X=36 \text{ のとき } Z=\frac{36-50}{7}=-2$$

よって、求める確率は $P(0 \leq X \leq 36) = P\left(-\frac{50}{7} \leq Z \leq -2\right) = P\left(2 \leq Z \leq \frac{50}{7}\right)$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{50}{7}\right) = p\left(\frac{50}{7}\right) \doteq 0.5 \text{ と考えてよいから}$$

$$P\left(2 \leq Z \leq \frac{50}{7}\right) = p\left(\frac{50}{7}\right) - p(2) \doteq 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \quad \text{答}$$

教 p.107

5. 1000 人の生徒に数学の試験を実施したところ、その成績の分布は平均点 62 点、標準偏差 8 点の正規分布で近似された。成績が上位 100 番までの生徒の得点はおよそ何点以上か。小数点以下を切り捨てて答えよ。

指針 得点と正規分布 得点を X 点とすると、 X は近似的に正規分布に従う。 X は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う変数 Z に変換し、正規分布表を用いて調べる。

解答 得点を X 点とする。 X は近似的に正規分布 $N(62, 8^2)$ に従うから、 $Z = \frac{X-62}{8}$

は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$P(Z \geq u) = \frac{100}{1000} = 0.1 \text{ を満たす } u \text{ を求める。}$$

$$P(Z \geq u) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq u) = 0.5 - p(u)$$

$$0.5 - p(u) = 0.1 \text{ より } p(u) = 0.4$$

これを満たす u は、正規分布表より $u \doteq 1.28$

$$Z = 1.28 \text{ のとき } \frac{X-62}{8} = 1.28$$

この不等式を解くと、 $X = 1.28 \times 8 + 62$ より $X = 72.24$

よって、成績が上位 100 番までの生徒の得点は **72 点以上** 答

教 p.107

6. 視聴率調査用のモニターテレビ 625 台について調査したところ、ある番組の視聴台数は 125 台であった。この番組の、視聴者全体における視聴率 p に対して、信頼度 95 % の信頼区間を求めよ。

指針 母比率の推定 標本比率を R 、標本の大きさを n とすると、母比率 p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[R - 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}, R + 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right]$$

解答 標本比率 R は $R = \frac{125}{625} = 0.2$ 、標本の大きさは $n = 625$ であるから

$$1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{625}} = 1.96 \times 0.016 \doteq 0.031$$

よって、求める信頼区間は $[0.2 - 0.031, 0.2 + 0.031]$

すなわち **[0.169, 0.231]** 答

7. ある2つの野球チーム A, B の年間の対戦成績は, A の 25 勝 11 敗であった。両チームの力に差があると判断してよいか。有意水準 5% で検定せよ。また, 有意水準 1% で検定せよ。

指針 両側検定 判断したい主張は「両チームの力に差がある」, それに対する仮説は「両チームの力に差がない」であり, A が勝つ確率を p とすれば, それぞれ $p \neq 0.5$, $p = 0.5$ と表される。判断したい主張が「キ」で表されるときは両側検定を用いる。 $p = 0.5$ のもとで A が勝つ回数を X とすると, X は二項分布 $B(36, 0.5)$ に従うから, 標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に変換し, $X = 25$ に対応する Z の値について調べる。

解答 A が勝つ確率を p とする。

両チームの力に差があるなら, $p \neq 0.5$ である。

ここで, 「両チームの力に差がない」, すなわち $p = 0.5$ という仮説を立てる。

この仮説が正しいとすると, 36 回の対戦のうち A が勝つ回数 X は, 二項分布 $B(36, 0.5)$ に従う。

X の期待値 m と標準偏差 σ は

$$m = 36 \times 0.5 = 18, \quad \sigma = \sqrt{36 \times 0.5 \times 0.5} = 3$$

よって, $Z = \frac{X - 18}{3}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

有意水準が 5% のとき

正規分布表より $P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ であるから, 有意水準 5% の棄却域は $Z \leq -1.96$ または $1.96 \leq Z$

$X = 25$ のとき $Z = \frac{25 - 18}{3} = 2.33 \dots$ であり, この値は棄却域に入るから, 仮説は棄却できる。

すなわち, 両チームの力に差があると判断してよい。 ㊦

有意水準が 1% のとき

正規分布表より $P(-2.58 \leq Z \leq 2.58) = 0.99$ であるから, 有意水準 1% の棄却域は $Z \leq -2.58$ または $2.58 \leq Z$

$X = 25$ のとき $Z = \frac{25 - 18}{3} = 2.33 \dots$ であり, この値は棄却域に入らないから,

仮説は棄却できない。

したがって, 両チームの力に差があるとは判断できない。 ㊦

第2章 章末問題B

教 p.108

2章

統計的な推測

8. 1個のさいころを4回投げて、 k 回目に出た目が3の倍数のとき $X_k=1$ とし、3の倍数でないとき $X_k=0$ とする。

$X=X_1+X_2+X_3+X_4$ とするとき、 X の期待値と分散および標準偏差を求めよ。

指針 二項分布 X はさいころを4回投げたときに3の倍数の目が出た回数を表すから、二項分布に従う。よって、二項分布の期待値と標準偏差を計算すればよい。

解答 X の値は X_1, X_2, X_3, X_4 のうち1の値をとるものの個数を表し、これは、1個のさいころを4回投げたときに、出た目が3の倍数になった回数を示している。

さいころを1回投げたとき、3の倍数の目が出る確率は

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ であるから、 X は二項分布 $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ に従う。

X の期待値は $E(X)=4 \cdot \frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

X の分散は $V(X)=4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$

X の標準偏差は $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

図 期待値 $\frac{4}{3}$, 分散 $\frac{8}{9}$, 標準偏差 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

教 p.108

9. ある大学の入学試験は、入学定員400名に対し受験者数が2600名で、500点満点に対し平均点は285点、標準偏差は72点であった。得点の分布が正規分布で近似されるとみなすとき、合格最低点はおおよそ何点か。小数点以下を切り捨てて答えよ。

指針 正規分布の応用 受験者の得点を X , 合格最低点を a 点とすると

$P(X \geq a) = \frac{400}{2600}$ が成り立つ。 X を近似的に標準正規分布に従う変数 Z に変換し、 $P(X \geq a) = P(Z \geq u)$ となる u の値をまず求める。

解答 受験者の得点を X とする。

X は近似的に正規分布 $N(285, 72^2)$ に従うとみなすから、

$Z = \frac{X-285}{72}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

合格最低点を a 点とし、 $u = \frac{a-285}{72}$ とすると

$$P(X \geq a) = P(Z \geq u) = \frac{400}{2600} \text{ が成り立つ。}$$

ここで、 $P(Z \geq u) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq u) = 0.5 - p(u)$ より

$$0.5 - p(u) = \frac{400}{2600} \div 0.1538$$

すなわち $p(u) \div 0.5 - 0.1538 = 0.3462$

これを満たす u の値は、正規分布表より $u \div 1.02$

このとき、 $1.02 \div \frac{a-285}{72}$ より $a \div 358.44$

したがって、合格最低点は 358 点 答

教 p.108

10. 大量の商品があり、そのうちの 5% は模造品であるという。無作為に抽出した 1900 個の商品の中に含まれる模造品の率を R とする。

R が 3.5% 以上 6.5% 以下である確率を求めよ。

指針 標本比率と正規分布 特性 A の母比率が p である母集団から抽出された大きさ n の無作為標本について、特性 A の標本比率 R は、 n が大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う。

確率変数 R を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 Z に変換して、正規分布表を利用して考える。

解答 母比率を p とする。

$p = 0.05$, $n = 1900$ であるから

$$\frac{p(1-p)}{n} = \frac{0.05 \times 0.95}{1900} = 0.000025 = 0.005^2$$

よって、 R は近似的に正規分布 $N(0.05, 0.005^2)$ に従うから、

$Z = \frac{R - 0.05}{0.005}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$$R = 0.035 \text{ のとき} \quad Z = \frac{0.035 - 0.05}{0.005} = -3$$

$$R = 0.065 \text{ のとき} \quad Z = \frac{0.065 - 0.05}{0.005} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad P(0.035 \leq R \leq 0.065) &= P(-3 \leq Z \leq 3) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 3) = 2p(3) \\ &= 2 \times 0.49865 = 0.9973 \quad \text{答} \end{aligned}$$

11. ある政党の支持率は約 40 % であると予想されている。この支持率を、信頼区間の幅が 4 % 以下となるように推定したい。信頼度 95 % で推定するには、何人以上を抽出して調べればよいか。

指針 母比率の推定 標本の大きさを n 、標本比率を R とすると、母比率 p に対する信頼度 95 % の信頼区間は

$$\left[R - 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}, R + 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right]$$

信頼区間が $[A, B]$ であるとき、信頼区間の幅とは $B - A$ のことである。

解答 標本の大きさを n 、標本比率を R とすると、信頼度 95 % の信頼区間の幅は

$$\left(R + 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right) - \left(R - 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}} \right) = 2 \times 1.96 \sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

$$\text{したがって } 2 \times 1.96 \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{n}} \leq 0.04$$

となる自然数 n の値の範囲を求めればよい。

$$\sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{n}} \leq \frac{0.04}{2 \times 1.96}$$

$$\frac{0.4 \times 0.6}{n} \leq \left(\frac{0.04}{2 \times 1.96} \right)^2$$

$$0.4 \times 0.6 \div \left(\frac{0.04}{2 \times 1.96} \right)^2 \leq n$$

これを解いて $n \geq 2304.96$

よって、2305 人以上 を抽出して調べればよい。 答

12. 内容量 300 g と表示されている大量の缶詰から、無作為に 100 個を取り出し重さを量ったところ、平均値が 298.6 g、標準偏差が 7.4 g であった。全製品の 1 缶あたりの平均内容量は、表示より少ないと判断してよいか。有意水準 5 % で検定せよ。

指針 片側検定 全製品の 1 缶あたりの平均内容量、すなわち、母平均を m g とすると、判断したい主張は「 $m < 300$ 」であり、それに対する仮説は「 $m = 300$ 」である。判断したい主張が「 $<$ 」で表されるから片側検定を用いる。また、 $m = 300$ のもとで、標本平均 $\bar{X}$ は $N\left(300, \frac{7.4^2}{100}\right)$ に従うとみなせることを利用する。

解答 全製品の 1 缶あたりの平均内容量、すなわち、母平均を m g とする。平均内容量が表示より少ないならば、 $m < 300$ である。ここで、「平均内容量は表示の通りである」、すなわち $m = 300$ という仮説を立てる。この仮説が正しいと

し、無作為抽出した 100 個の標本平均を $\bar{X}_g$ とすると、 $\bar{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(300, \frac{7.4^2}{100}\right)$ に従う。

$\frac{7.4^2}{100} = 0.74^2$ であるから、 $Z = \frac{\bar{X} - 300}{0.74}$ は近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.64 \leq Z \leq 0) = 0.45$ であるから、有意水準 5% の棄却域は $Z \leq -1.64$

$\bar{X} = 298.6$ のとき $Z = \frac{298.6 - 300}{0.74} = -1.89 \dots \dots$ であり、

この値は棄却域に入るから、仮説は棄却できる。

すなわち、1 缶あたりの平均内容量は表示より少ないと判断してよい。 答

補足 母平均 m 、母標準偏差 σ の母集団から抽出された大きさ n の無作為標本の標本平均 $\bar{X}$ は、 n が大きいとき、近似的に正規分布 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなせる。